インスタントン近似と周期的反自己双対接続と平均次元

松尾 信一郎*
東京大学大学院数理科学研究科

第 56 回幾何学シンポジウム (佐賀大学)

概要

四次元開多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなす無限次元モジュライ空間を Gromov の平均次元の観点から研究した．京都大学の塚本真輝氏との共同研究 [5] である．

1 序

Atiyah-Hitchin-Singer [1] は，四次元閉多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間が滑らかな有限次元多様体になりえることを看破し，Donaldson [2] に代表される現在のゲージ理論の礎を築いた．彼らの研究を閉多様体から開多様体に拡張することは自然な流れである．だが，開多様体ではその非コンパクト性に由来する困難がある．反自己双対接続のエンドでの挙動の巧みな制御によりその困難を回避することで，開多様体上でも閉多様体上と平行した議論ができる場合がある．これは重要な観点であり，多くの素晴らしい研究がなされてきた．しかし，開多様体の非コンパクト性を積極的に活用することで，閉多様体における状況とは直交した研究をすることもありえるのではなかろうか．例えば，無限エネルギー反自己双対接続は開多様体に固有の現象である．我々は四次元開多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなすモジュライ空間を後者の観点から研究した．我々のモジュライ空間はコンパクト無限次元位相空間であり，現行のいかなる意味でも多様体の構造を入れることができない．ところで，そもそも無限次元空間の幾何学の研究は五里霧中の荒野であり，一番難しいことは優れた問題設定を与えることである．そこに Gromov が豊穣な研究領域の存在を喝破した．「無限次元空間の次元」としての**平均次元**である．そして，我々は，論文 [5] において，$S^3 \times \mathbb{R}$ 上の無限エネルギー反自己双対接続のなす無限次元モジュライ空間の平均次元についての結果を得た．AHS の主定理 [1, Theorem 6.1.] は四次元有向反自己双対正スカラー曲率 Riemann **閉**多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間の次元公式であり，我々の主定理は四次元有向反自己双対一様正スカラー曲率 Riemann **開**多様体の最も基本的な例である $S^3 \times \mathbb{R}$ 上の反自己双対接続のモジュライ空間の平均次元公式である．我々の研究は「無限エネルギーゲージ理論」への第一歩をまさに踏み出したところである．

* exotic@ms.u-tokyo.ac.jp

2 主定理

この節では我々の主定理を正確に述べる．平均次元の定義や性質については第 3 節で，ゲージ理論の用語については第 4 節で，証明の概略については第 5 節で，それぞれ扱われている．

$X := S^3 \times \mathbb{R}$ として，S^3 の定曲率計量と $\mathbb{R}$ の標準計量の直積計量を与える．$P := X \times \mathrm{SU}(2) \to X$ を自明束とする．点 $\theta_0 \in S^3$ を固定する．d を正の実数とせよ．**ASD 接続の周期的枠付きモジュライ空間** $\mathcal{M}_d$ **(periodically framed moduli space of ASD connections)** を，次の二条件を課したゲージ同値類 $[\mathbf{A}, \mathbf{p}]$ の集合として定義する：

1. $\mathbf{A}$ は P 上の ASD 接続であり，$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} \leq d$ を充たす．
2. $\mathbf{p} \colon \mathbb{Z} \to P$ は，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathbf{p}(n) \in P_{(\theta_0, n)}$ を充たす．

ここで，$[\mathbf{A}, \mathbf{p}]$ と $[\mathbf{B}, \mathbf{q}]$ がゲージ同値であるとは，ゲージ変換 (= 束写像)$g \colon P \to P$ が存在して，$g(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ と $g(\mathbf{p}(n)) = \mathbf{q}(n)$ が成り立つこととする．条件 1. では，L^2 ノルムではなく，L^∞ **ノルム**を用いていることに注意していただきたい．また，$d_1 \leq d_2$ ならば，$\mathcal{M}_{d_1}$ は $\mathcal{M}_{d_2}$ に含まれる．

モジュライ空間 $\mathcal{M}_d$ には広義一様収束の位相を与える．すると，Uhlenbeck コンパクト性より，$\mathcal{M}_d$ は距離化可能コンパクト位相空間である．$\mathcal{M}_d$ の被覆次元は無限大である．

加法群 $\mathbb{Z}$ は X に平行移動として連続に作用し，その作用は自明束 P に持ち上がる．そして，加法群 $\mathbb{Z}$ は $\mathcal{M}_d$ にも連続に作用する：

$$\mathcal{M}_d \times \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_d, \quad ([\mathbf{A}, \mathbf{p}], \gamma) \mapsto [\gamma^* \mathbf{A}, \gamma^* \mathbf{p}].$$

ただし，γ^* は $\gamma \colon P \to P$ による引き戻しである．

Gromov [3] の**平均次元 (mean dimension)** は，$\mathbb{Z}$ が連続に作用する距離化可能コンパクト位相空間の位相不変量であった．従って，$\mathcal{M}_d$ の平均次元 $\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$ を考えることができる．

定理 1. [5, Theorem 1.1.]

$$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \lneq \infty.$$

さらに，$d \to \infty$ のとき，$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \to \infty$.

すなわち，モジュライ空間 $\mathcal{M}_d$ の被覆次元は無限大だが，平均次元ならば有限である．しかも，$d \to \infty$ のときの漸近挙動から，その平均次元は自明ではない．

そして，さらなる精密な評価も得られる．P 上の ASD 接続 $\mathbf{A}$ に対して，その**平均エネルギー (mean energy)** を

$$\rho(\mathbf{A}) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{8\pi^2 T} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{S^3 \times [t, t+T]} |F_{\mathbf{A}}|^2 \, d\mathrm{vol} \right)$$

と定義する．F_A の L^∞ ノルムが有限ならば，この極限は常に有限確定値として存在する．そして，$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} \leq d$ となる P 上の ASD 接続 $\mathbf{A}$ に対する $\rho(\mathbf{A})$ の上限を $\rho(d)$ とする．また，$S^3 \times S^1$ 上のインスタントンを被覆写像 $X = S^3 \times \mathbb{R} \to S^3 \times S^1$ により引き戻して得られる P 上の ASD 接続を，

周期的 ASD 接続 (periodic ASD connections) と呼ぶ．$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} < d$ となる周期的 ASD 接続 $\mathbf{A}$ に対する $\rho(\mathbf{A})$ の上限を $\rho_{peri}(d)$ とする．我々は**局所平均次元 (local mean dimension)** を導入し，$\mathcal{M}_d$ の局所平均次元を評価した．

定理 2. [5, Theorem 1.2.] 任意の $[\mathbf{A}, \mathbf{p}] \in \mathcal{M}_d$ に対して，

$$\dim_{[\mathbf{A},\mathbf{p}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \leq 8\rho(\mathbf{A}) + 3$$

が成り立つ．さらに，$\mathbf{A}$ が $\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} < d$ となる周期的 ASD 接続ならば，

$$\dim_{[\mathbf{A},\mathbf{p}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) = 8\rho(\mathbf{A}) + 3$$

が成り立つ．従って，$\mathcal{M}_d$ の局所平均次元 $\dim_{loc}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$ は，

$$8\rho_{peri}(d) + 3 \leq \dim_{loc}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \leq 8\rho(d) + 3$$

を充たす．

3 平均次元入門

この節では Gromov [3] による**平均次元 (mean dimension)** を解説する．それは「無限次元空間の次元」であり，従順群が連続に作用する距離化可能コンパクト位相空間の位相不変量である．簡単のため，従順群としては加法群 $\mathbb{Z}$ のみを扱うことにする．被覆次元の定義など次元論の基礎については数学辞典を参照のこと．

さて，厳密な定義をする前に，まずは最も基本的で最も重要な例を挙げる．

例 3. N 次元 Euclid 空間の単位閉球を B とする．$B^{\mathbb{Z}}$ を B の両側無限直積として，直積位相を与える．すると，Tikhonov の定理により，$B^{\mathbb{Z}}$ は距離化可能コンパクト位相空間である．$B^{\mathbb{Z}}$ の被覆次元は無限大になる．また，添字のずらしにより，加法群 $\mathbb{Z}$ は $B^{\mathbb{Z}}$ に連続に作用する．Gromov の平均次元は，$\mathbb{Z}$ が連続に作用する距離化可能コンパクト位相空間の位相不変量なので，$B^{\mathbb{Z}}$ の平均次元 $\dim(B^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z})$ を考えることができる．このとき，

$$\dim(B^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) = N$$

である．特に，$N = 1$ のとき，$\dim([0,1]^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) = 1$ である．

確かに $B^{\mathbb{Z}}$ の次元は無限大だが，$\mathbb{Z}$ の「個数」を $|\mathbb{Z}|$ とすれば，直観的には，その無限の「大きさ」は $\dim B \times |\mathbb{Z}|$ としてもよいだろう．そして，平均次元 $\dim(B^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z})$ とは，群作用による $\dim B^{\mathbb{Z}}$ の平均化の操作であり，直観的には，

$$\dim(B^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) = \frac{\dim B^{\mathbb{Z}}}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\dim B \times |\mathbb{Z}|}{|\mathbb{Z}|} = \dim B = N$$

ということである．ちなみに，これは $\dim(B^{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})$ ではない．

では，平均次元に厳密な定義を与える．それは力学系での位相的エントロピーの定義に似ている．(X,d) をコンパクト距離空間とせよ．

定義 4. $\epsilon \geq 0$ を非負実数とする．位相空間 Y と連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，f が **ϵ-埋め込み (ϵ-embedding)** であるとは，$\mathrm{Diam}_d\left(f^{-1}(y)\right) \leq \epsilon$ が任意の点 $y \in Y$ で成り立つこととする．

すなわち，ϵ 程度の誤差を許容すれば，f は埋め込みになるということである．また，$\epsilon = 0$ のとき，ϵ-埋め込みとは普通の埋め込みのことである．

定義 5. 各正実数 $\epsilon > 0$ に対して，n 次元多面体 P と ϵ-埋め込み $f\colon X \to P$ が存在する自然数 n の最小値のことを，(X,d) の**幅次元 (width dimension)** とよび，$\mathrm{Widim}_\epsilon(X,d)$ と書く．

すなわち，幅次元とは，ϵ 以下の細かいものを無視して見たときの X の巨視的な次元である．また，X はコンパクトだったので，たとえ被覆次元が無限大でも，幅次元は常に有限である．$\epsilon \to 0$ のとき，幅次元は単調増大であり，被覆次元に収束する：

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon(X,d) = \dim X.$$

例えば，$0 < \epsilon < 1$ に対して，$X := [0,1] \times [0,\epsilon]$ として，d を Euclid 距離とする．このとき，自然な射影 $X \to [0,1]$ は ϵ-埋め込みである．さらに，0 次元多面体 (= 点) への X からの ϵ-埋め込みが存在しないことは定義からすぐに従うので，$\mathrm{Widim}_\epsilon(X,d) = 1$ となる．

次に，基本的で重要な例を挙げる．

例 6. $X := [0,1]^N$, $d(x,y) := d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$ とするとき，各 $0 < \epsilon < 1$ に対して，

$$\mathrm{Widim}_\epsilon([0,1]^N, d_\infty) = N$$

が成り立つ．この例の深い点は $\epsilon < 1$ という評価が N には依存しないことである．証明は，上からの評価は易しいが，下からの評価は難しい．本質は Brouwer の不動点定理である．詳細は [5, Lemma 2.1.] などにある．

さて，ここからは群作用を考える．加法群 $\mathbb{Z}$ が X に連続に作用しているとせよ．$k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす．

定義 7. 各自然数 N に対して，X 上の新しい距離 d_N を

$$d_N(x,y) := \max_{|k|<N} d(k \cdot x, k \cdot y)$$

と定める．

X はコンパクトだったので，(X,d) と (X,d_N) とは同相になる．特に，(X,d_N) はコンパクトである．ここで重要な観点は，群作用によるくりこみで距離空間の無限系列を系統的に作り出せるということである．

定義 8.

$$\mathrm{Widim}_\epsilon((X,d):\mathbb{Z}) := \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Widim}_\epsilon(X,d_N)}{2N-1}$$

いわゆる Ornstein-Weiss の補題により，この極限は有限確定値として常に存在する．証明は [5, Lemma 2.5.] などにある．

そして，平均次元 $\dim(X:\mathbb{Z})$ は次で定義される．

定義 9.

$$\dim(X:\mathbb{Z}) := \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon((X,d):\mathbb{Z}).$$

幅次元や $\mathrm{Widim}_\epsilon((X,d):\mathbb{Z})$ などは距離に依存しているが，平均次元は X の位相と両立する距離の取り方とは独立である．つまり，(X,d) と (X,d') が同相ならば，

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon((X,d):\mathbb{Z}) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon((X,d'):\mathbb{Z})$$

が成り立つ．これは，X のコンパクト性から恒等写像 $id\colon (X,d)\to(X,d')$ が一様連続になることよりわかる．我々が考察する位相空間は，たとえ距離化可能であったとしても，その位相と両立する距離を標準的に選び出す方法がないことが多い．従って，この性質は重要である．

また，平均次元は，非負実数か無限大になるが，自然数とは限らない．

さて，一体全体この定義は何なのだろうか．例 3 を思い出す．閉区間 $[0,1]$ の両側無限直積 $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ に直積位相を与えたものには，加法群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用して，このとき，$\dim([0,1]^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z}) = 1$ だった．この例の直観的意味をもう少し考えてみる．

$0<\delta<1$ を固定するとき，

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{|n|}\ |x_n - y_n|$$

は $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ の位相を実現する距離である．ここで，$n\neq 0$ かつ δ がとても小さいとき，$\delta^{|n|}$ はものすごく小さいということに着目せよ．従って，直観的には，

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{|n|}\ |x_n - y_n| \\ &= |x_0-y_0| + \delta(|x_1-y_1| + |x_{-1}-y_{-1}|) + \delta^2(|x_2-y_2| + |x_{-2}-y_{-2}|) + \cdots \\ &\text{“}=\text{”}\ |x_0-y_0| + O(\delta) \end{aligned}$$

としてもよいだろう．また，$\mathbb{Z}$ の $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ への作用は添字のずらしなので，

$$d(k\cdot x, k\cdot y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{|n|}\ |x_{n+k} - y_{n+k}|$$

を得る．従って，再び，直観的には，

$$d(k\cdot x, k\cdot y)\ \text{“}=\text{”}\ |x_k - y_k| + O(\delta)$$

としてもよいだろう．すると，群作用でくりこまれた距離 d_N は，

$$\begin{aligned} d_N(x,y) &= \max\left(d(-N+1\cdot x, -N+1\cdot y),\ldots,d(x,y),\ldots,d(N-1\cdot x, N-1\cdot y)\right) \\ &\text{“}=\text{”}\ \max\left(|x_{-N+1}-y_{-N+1}|,\ldots,|x_0-y_0|,\ldots,|x_{N-1}-y_{N-1}|\right) + O(\delta) \end{aligned}$$

としてもよいだろう．さて，例 6 を鑑みれば，

$$\mathrm{Widim}_\epsilon([0,1]^{\mathbb{Z}}, d_N) \text{ “ = ” } 2N-1+O(\delta)$$

としてもよいだろう．すると，平均次元は

$$\dim [0,1]^{\mathbb{Z}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{Widim}_\epsilon([0,1]^{\mathbb{Z}})}{2N-1} \text{ “ = ” } \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2N-1+O(\delta)}{2N-1} \text{ “ = ” } 1$$

となる．

この議論を正当化するのは ϵ-δ 論法の役目である．上からの評価 $\dim([0,1]^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) \le 1$ を示すには，自然な射影

$$f\colon [0,1]^{\mathbb{Z}} \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{Z}\cap[-\ell,\ell]}$$

を用いる．これが $([0,1]^{\mathbb{Z}}, d_N)$ からの ϵ-埋め込みになるように ℓ を選んでやればよい．下からの評価 $\dim([0,1]^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) \ge 1$ を示すには，周期的埋め込み

$$i\colon [0,1]^{2N-1} \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{Z}},\ (x_{-N+1},\dots,x_{N-1}) \mapsto (\dots, x_{N-1}, x_{-N+1},\dots,x_{N-1},x_{-N+1},\dots)$$

を用いる．これが $([0,1]^{2N-1}, \max_k |x_k - y_k|)$ から $([0,1]^{\mathbb{Z}}, d_N)$ への拡大写像なので，両者の幅次元に不等式が導かれ，従って，両者の平均次元にも不等式が導かれる．

このように，詳しく考えてみると，上からの評価と下からの評価ではその証明の仕組みが根本的に異なっている．$[0,1]^{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ から $[0,1]$ への函数の全体に広義一様収束の位相を与えたものだとみなせる．このとき，射影 f とは「コンパクト台函数での近似」であり，埋め込み i とは「周期函数の変形理論」である．我々の定理の証明はこのアイデアの延長線上にあり，前者は**無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似**に，後者は**周期的 ASD 接続の無限次元変形理論**に，それぞれ対応する．

最後に，定理 2 で言及した**局所平均次元 (local mean dimension)** を説明する．これは論文 [5, Section 2.2.] で導入された．我々に親しみ深い次元の多くは局所的な定義ができる．例えば，被覆次元は局所的な概念であり，

$$\dim X = \sup_{p\in X} \left(\lim_{r\to 0} \dim B_r(p) \right)$$

が成り立つ．ただし，$B_r(p)$ は点 p を中心とする半径 r の閉球である．しかし，平均次元でこのような記述が可能かどうかは知られていない．そこで導入したのが局所平均次元である．

点 $p \in X$ と正実数 $r > 0$ に対して，

$$B_r(p)_{\mathbb{Z}} := \{x \in X \mid d(n\cdot x, n\cdot p) \le r \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

とする．$B_r(p)_{\mathbb{Z}}$ は X の閉集合である．

$$\dim_p (X:\mathbb{Z}) := \lim_{r\to 0} \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2N-1} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\mathrm{Widim}_\epsilon(B_r(p)_{\mathbb{Z}}, d_{k+N})\right) \right) \right]$$

を**点 $p \in X$ での局所平均次元**と呼ぶ．これも X の位相と両立する距離の取り方に独立である．

$$\dim_{loc} (X:\mathbb{Z}) := \sup_{p\in X} \left(\dim_p (X:\mathbb{Z}) \right)$$

を**局所平均次元**と定義する．このとき，

$$\dim_{loc}(X:\mathbb{Z}) \le \dim(X:\mathbb{Z})$$

が成り立つ．従って，局所平均次元の下からの評価は平均次元の下からの評価になる．

4　ゲージ理論の速成コース

この節ではゲージ理論の設定と用語を紹介する．この論説ではゲージ理論とは四次元 Yang-Mills ゲージ理論を指す．幾何解析的側面についても配慮された概説としては [4] がある．

X を有向四次元 Riemann 多様体として，$P \to X$ を SU(2)-主束とせよ．点 $x_0 \in X$ を固定する．x_0 での P のファイバー P_{x_0} の元を**枠**と呼ぶ．P の束写像を**ゲージ変換**とも呼ぶ．SU(2) の $\mathfrak{su}(2)$ への随伴表現による P の誘導束を $\mathfrak{g}_P$ として，$\mathfrak{g}_P$ に値を持つ j 次微分形式の空間を $\Omega^j(\mathfrak{g}_P)$ とする．P の接続の全体は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上のアフィン空間であり，曲率は $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ の元だった．また，曲率の L^2 ノルムの二乗を**エネルギー**と呼ぶ．

X の向き付けと Riemann 計量から Hodge 作用素 $*\colon \Omega^2(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ が定まり，X は四次元なので $*$ は包合的 ($*^2 = id$) である．従って，$\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ は $*$ の固有空間に直交直和分解

$$\Omega^2(\mathfrak{g}_P) = \underbrace{\Omega^+(\mathfrak{g}_P)}_{*=+id} \oplus \underbrace{\Omega^-(\mathfrak{g}_P)}_{*=-id}$$

する．$\Omega^+(\mathfrak{g}_P)$ と $\Omega^-(\mathfrak{g}_P)$ の元をそれぞれ**自己双対形式**と**反自己双対形式**と呼ぶ．

定義 10. P の接続 A が**反自己双対接続 (Anti-Self-Dual connections, ASD 接続)** であるとは，その曲率 F_A が反自己双対形式であること，すなわち，**ASD 方程式** $F_A + *F_A = 0$ が成り立つこととする．特に，有限エネルギー ASD 接続を**インスタントン**と呼ぶ．ASD 接続はゲージ変換で不変である．すなわち，A が ASD 接続ならば，任意のゲージ変換 $g\colon P \to P$ に対して，$g(A)$ も ASD 接続になる．**ASD 接続の枠付きモジュライ空間** $\mathcal{M}$ とは，ASD 接続 A と枠 $p \in P_{x_0}$ の組のゲージ同値類 $[A, p]$ の全体からなる集合である．ここで，$[A, p]$ と $[B, q]$ がゲージ同値であるとは，ゲージ変換 $g\colon P \to P$ が存在して，$g(A) = B$ と $g(p) = q$ が成り立つこととする．

ASD 方程式は接続に対する一階非線形偏微分方程式である．これは楕円型ではない．また，閉多様体上の任意の ASD 接続はインスタントンである．

さて，形式的な描像を導入する．

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= P \text{ 上の SU(2)-接続全体の無限次元アフィン空間と枠全体 } P_{x_0} \text{ の積} \\ \mathcal{G} &:= P \text{ のゲージ変換全体の群} \\ \Omega^+(\mathfrak{g}_P) &:= \text{自己双対形式全体の無限次元ベクトル空間} \end{aligned}$$

を考えよう．$\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}$ に自由に作用する．$M := \mathcal{A}/\mathcal{G}$, $E := \mathcal{A} \times_{\mathcal{G}} \Omega^+(\mathfrak{g}_P)$ と定義する．このとき，E は M 上の「ベクトル束」である．また，曲率の自己双対部分を取る写像 $\mathcal{A} \ni (A, p) \mapsto F_A^+ \in \Omega^+(\mathfrak{g}_P)$

はゲージ同変だったので，ベクトル束 $E \to M$ の「切断」と考えられる．この切断の零点集合は $\{(A,p) \in \mathcal{A} \mid F_A^+ = 0\}/\mathcal{G}$ であり，これは $\mathcal{M}$ のことである．

$$\begin{tikzcd} E := \mathcal{A} \times_{\mathcal{G}} \Omega^+(\mathfrak{g}_P) \arrow[d] \\ M := \mathcal{A}/\mathcal{G} \supset \{(A,p) \in \mathcal{A} \mid F_A^+ = 0\}/\mathcal{G} = \mathcal{M} \arrow[u, bend left, "(A,p)\mapsto F_A^+"] \end{tikzcd}$$

さて，$\mathcal{M}$ は何次元だろうか．$\mathcal{M}$ はベクトル束の切断の零点集合なので，その次元は，形式的には，底空間の次元とベクトル束の階数の差と考えてもよいだろう．しかし，両者は無限大である．

$$\dim \mathcal{M} = \dim M - \operatorname{rank} E = \infty - \infty = \ ???$$

無限と無限の差は，有限か，無限か，意味がないか，そのどれかである．

X が**閉**多様体のとき，Atiyah-Hitchin-Singer の論文 [1] が金字塔である．彼らは，$\mathcal{M}$ に自然な位相を与え，そして，インスタントンの変形理論を構築することにより，$\mathcal{M}$ の被覆次元は有限であることを示した．

$$\dim \mathcal{M} = \dim M - \operatorname{rank} E = \infty - \infty \lneqq \infty$$

しかし，X が**開**多様体のとき，その状況は根本的に異なる．もはや無限と無限の差は有限とは限らない．例えば，我々のモジュライ空間 $\mathcal{M}_d$ の被覆次元は無限大である．

$$\dim \mathcal{M}_d = \dim M - \operatorname{rank} E = \infty - \infty = \infty$$

だが，我々は，$\mathcal{M}_d$ に自然な位相を与え，そして，無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似と周期的 ASD 接続の無限次元変形理論を構築することにより，$\mathcal{M}_d$ の**平均次元**ならば有限確定値であることを示した．

$$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) = \frac{\dim \mathcal{M}_d}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \lneqq \infty$$

5　主定理の証明の方針

この節では主定理の証明の方針を解説する．設定や主張などは第 2 節にある．基本のアイデアは例 3 と同じである．眼目は**無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似**と**周期的 ASD 接続の無限次元変形理論**の確立である．技術的な最大の障壁は ASD 方程式が楕円型ではないことにある．閉多様体上では Coulomb ゲージを取ることでその障壁は乗り越えられた．しかし，我々の状況ではおそらく Coulomb ゲージは存在しない．詳細は論文 [5] を参照していただきたい．

5.1　上からの評価：インスタントン近似

まずは定理 1 の $\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \lneqq \infty$ について解説する．$\mathcal{M}_d$ の位相と両立する距離を dist とせよ．ここでは詳しく述べないが dist は慎重に選ぶ必要がある．$\mathcal{M}_d$ の平均次元を上から評価するため

には，$\mathrm{Widim}_\epsilon(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ を上から評価せねばならない．従って，$(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ から有限多面体への ϵ-埋め込みを系統的に構成する必要がある．そこで**無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似**を用いる．自然数 T と正実数 $c > 0$ に対して，モジュライ空間 $\mathcal{M}_T(c)$ を，次の二条件を課したゲージ同値類 $[\mathbf{A}, \mathbf{p}]$ の集合として定義する：

1. $\mathbf{A}$ は P 上の ASD 接続であり，$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^2}^2 \leq 8\pi^2 c$ を充たす．
2. $\mathbf{p}\colon (\mathbb{Z} \cap [-T, T]) \to P$ は，各 $n \in (\mathbb{Z} \cap [-T, T])$ に対して，$\mathbf{p}(n) \in P_{(\theta_0, n)}$ を充たす．

条件 1. では L^2 ノルムを用いていることに注意していただきたい．従って，$\mathcal{M}_T(c)$ の元はインスタントンである．また，$\mathcal{M}_T(c)$ には有限次元多面体の構造が入る．Atiyah-Singer の指数定理より，

$$\dim \mathcal{M}_T(c) \leq 8c + 3 \cdot (2T + 1)$$

がわかる．

$[\mathbf{A}, \mathbf{p}]$ を $\mathcal{M}_d$ の元とする．$(\mathbf{A}, \mathbf{p})$ を $S^3 \times [-T, T]$ の外で切り捨て平坦接続とつなぎ，$\mathbf{p}' = \mathbf{p}|_{[-T,T]}$ とすることにより，P 上の新しい枠付接続 $(\mathbf{A}', \mathbf{p}')$ を構成する．$\mathbf{A}$ も平坦接続も ASD 接続だが，$\mathbf{A}'$ は ASD 接続とは限らない. そこで，ASD 方程式を解くことで，$\mathbf{A}'$ を摂動して，ASD 接続 $\mathbf{A}''$ を構成する．このとき，L と D を N に独立に適切に選び，$T := N + L + D$ とすることで，

$$\left|\mathbf{A} - \mathbf{A}''\right| \leq \epsilon/4 \quad \text{for } |t| \leq N + L$$
$$\frac{1}{8\pi^2}\int_X \left|F(\mathbf{A}'')\right|^2 d\mathrm{vol} \leq \frac{2Td^2}{8\pi^2}\mathrm{vol}(S^3) + C$$

が充たされる．ただし，C は d だけに依存する定数である．すなわち，**インスタントン近似写像**

$$\mathcal{M}_d \to \mathcal{M}_T\left(\frac{2Td^2}{8\pi^2}\mathrm{vol}(S^3) + C\right), \quad [\mathbf{A}, \mathbf{p}] \mapsto [\mathbf{A}'', \mathbf{p}']$$

が構成された．これは $(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ から $\mathcal{M}_T(c)$ への ϵ-埋め込みになる．従って，

$$\mathrm{Widim}_\epsilon(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N) \leq \dim \mathcal{M}_T\left(\frac{2Td^2}{8\pi^2}\mathrm{vol}(S^3) + C\right) \leq \frac{2Td^2}{\pi^2}\mathrm{vol}(S^3) + 3(2T+1) + 8 \cdot C$$

を得る．$T = N + L + D$ であり，L と D は N に独立だったので，

$$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) = \lim_{\epsilon \to 0}\lim_{N \to \infty}\frac{\mathrm{Widim}_\epsilon(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)}{2N + 1} \leq \frac{d^2}{\pi^2}\mathrm{vol}(S^3) + 3 \lneq \infty$$

を得る．しかし，実は，**この証明はそのままではうまくいかない**．問題は $\mathbf{A}$ から $\mathbf{A}'$ を構成する切り捨てにある．これはゲージ同変な操作ではない．その処理が我々の考察の骨子の一つである．

5.2　下からの評価：変形理論

次に定理 2 の $8\rho(\mathbf{A}) + 3 \leq \dim_{[\mathbf{A},\mathbf{p}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$ について解説する．$[\mathbf{A}, \mathbf{p}]$ を，$\mathcal{M}_d$ の元であって，加法群 $\mathbb{Z}$ の作用で不変であり，さらに $\mathbf{A}$ は $\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} < d$ となる周期的 ASD 接続であるものとする．このとき，「$[\mathbf{A}, \mathbf{p}]$ の変形の空間 V」を

$$V := \left\{a \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \mid (d_A^* + d_A^+)\, a = 0, \|a\|_{L^\infty} < \infty\right\} \times \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{Z}} \mid \sup |u_n| < \infty\right\}$$

と定め，ノルム $\|(a,(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_V := \max(\|a\|_{L^\infty}, \sup|u_n|)$ を与える．すると，$(V, \|\cdot\|_V)$ は無限次元 Banach 空間になり，加法群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用する．$B_r(V)$ を原点中心で半径 r の V の閉球として，広義一様収束の位相を与える．すると，**周期的 ASD 接続の無限次元変形理論**を構築することにより，r が十分小さいときに，加法群 $\mathbb{Z}$ の作用で同変な位相的埋め込み $B_r(V) \to \mathcal{M}_d$ が存在するとわかる．よって，

$$\dim_{[\mathbf{A},\mathbf{p}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \geq \dim_0(B_r(V) : \mathbb{Z})$$

を得る．また，各自然数 n に対して，加法群 $n\mathbb{Z}$ の作用で不変な V の部分空間を V_n とする．V_n の被覆次元は有限であり，Atiyah-Singer の指数定理により

$$\dim V_n = 8n\rho(\mathbf{A}) + 3n$$

と計算できる．すなわち，直観的には，「単位長さあたりの変形の自由度」は，少なくとも，

$$\frac{\dim V_n}{n} = \frac{8n\rho(\mathbf{A}) + 3n}{n} = 8\rho(\mathbf{A}) + 3$$

である．従って，

$$\dim_0(B_r(V) : \mathbb{Z}) \geq 8\rho(\mathbf{A}) + 3$$

を得る．これらを合わせて，

$$\dim_{[\mathbf{A},\mathbf{p}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \geq 8\rho(\mathbf{A}) + 3$$

が示せる．

$\mathbf{A}$ は本質的には閉多様体 $S^3 \times S^1$ 上のインスタントンなので，その小変形は従来の理論で構成できる．しかし，ここでは変形を「一様に」構成することが本質的であり，その処理が我々の考察のもう一つの骨子である．また，簡単のために，この節では $[\mathbf{A},\mathbf{p}]$ を加法群 $\mathbb{Z}$ の作用で不変としたが，この仮定は外すことができる．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, Vol. 362, No. 1711, pp. 425–461, 1978.

[2] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, Vol. 18, No. 2, pp. 279–315, 1983.

[3] Misha Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. *Math. Phys. Anal. Geom.*, Vol. 2, No. 4, pp. 323–415, 1999.

[4] Mitsuhiro Itoh and Hiraku Nakajima. Yang-Mills connections and Einstein-Hermitian metrics. In *Kähler metric and moduli spaces*, Vol. 18 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 395–457. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[5] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension. Preprint.